



TITLE:

# 量子論における超選択則の力学的起源とカラーの閉じ込め (幾何学的力学系の新展開)

AUTHOR(S):

谷村, 省吾

---

CITATION:

谷村, 省吾. 量子論における超選択則の力学的起源とカラーの閉じ込め (幾何学的力学系の新展開). 数理解析研究所講究録 2012, 1774: 100-117

ISSUE DATE:

2012-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/171727>

RIGHT:

# 量子論における超選択則の力学的起源とカラーの閉じ込め<sup>1</sup>

Dynamical Origin of Superselection Rules in Quantum Theory  
and Its Implication for Color Confinement

谷村 省吾

名古屋大学大学院情報科学研究科

Shogo Tanimura<sup>2</sup>

Graduate School of Information Science, Nagoya University

超選択則とは、量子力学に現れる自己共役作用素が測定可能な物理量に対応するための条件である。超選択則は天下りの要請事項だと思われがちだが、本論文では超選択則を測定過程の力学における対称性の帰結として演繹する。また、この結果は素粒子のカラーの閉じ込め問題の解決についての示唆を与える [1, 2].

## 1 背景

量子力学では、物理系の状態は Hilbert 空間の単位射線で表され、物理量は Hilbert 空間上の自己共役作用素 ( $A^\dagger = A$ ) で表されることになっている。しかし、**すべての自己共役作用素が測定可能な物理量と対応しているわけではない**。例えば、電子の Dirac 場  $\psi$  から定義される

$$\frac{1}{2}(\psi + \psi^\dagger), \quad \frac{1}{2i}(\psi - \psi^\dagger) \quad (1)$$

は、どちらも自己共役であるが測定可能量ではない。

1950 年頃、物理学者たちは Dirac スピノル場のパリティ変換は一意的に決まらないことに気づいていた [3, 4]。すなわち、空間反転 (space inversion) によって Dirac 場は

$$(i_s \psi)(t, \boldsymbol{x}) = e^{i\theta} \gamma^0 \psi(t, -\boldsymbol{x}) \quad (2)$$

と変換するが、位相因子  $e^{i\theta}$  は不定のまま残る。Yang, Tiomno, Zharkov などは、位相因子は  $\pm 1$  または  $\pm i$  に限られると主張していた。当時、Dirac 場で記述される粒子としては、陽子・中性子・電子・ミュー粒子・ニュートリノなどが知られていたが、それぞれの粒子はどのパリティ変換則に従うかということが、当時の物理学者たちの間で議論的になっていた。Dirac 場のパリティ変換則はどれを選んでも観測可能な量に関しては同じ予測が得られるように思われた。

<sup>1</sup>京都大学数理解析研究所研究集会『幾何学的力学系の新展開』, 2011 年 11 月 1 日講演。

<sup>2</sup>e-mail: tanimura[AT]is.nagoya-u.ac.jp

Wick, Wightman, Wigner は、そもそも Dirac 場そのものが測定可能量ではないので、そのパリティ変換が一意的に定まらなくてもよい、ということに気がついた(論文 1952 年 [3])。直接観測不可能なものに関しては理論形式の中に不定性があっても構わない。Dirac 場が直接観測で測れないものなのだから、そのパリティ変換が決まらなくてもしかたないし、それで問題ないという理屈である。

## 2 自己共役作用素イコール測定可能量か？

「すべての自己共役作用素が測定可能量を表している」という仮説は誰がいつ頃言い出したのかという問題は興味深いので、ちょっと調べてみる。von Neumann の有名な本『量子力学の数学的基礎』(井上・広重・恒藤訳) [5] には、

《量子力学的系の物理量に対して超極大なエルミート作用素を一意的に対応させられることは、我々の知っている通りであるが、それに加えて、これらの対応は一对一である、すなわち、すべての超極大エルミート作用素は現実の物理量に対応している、と仮定するのが都合がよい。》

と、さりげなく書かれている。あまりにもさりげなく書かれているので、よほど注意して探さないと見落としてしまうほどである。ここで「超極大なエルミート作用素」は現代の用語では自己共役作用素のことである。物理量が測定可能であるべしという物理的な要請を吟味すると、物理量が自己共役作用素で表されることは合理的に示されるが、逆に、任意の自己共役作用素が何らかの物理量に対応しているか、という点に関しては《そう仮定するのが都合がよい》という程度の正当性しか与えられない。例えば、物理量の和がまた物理量になることが示せるといった点が都合がよい。

この《…と仮定するのが都合がよい》という表現は von Neumann のドイツ語の原文 (1932 年) では《... es ist zweckmässig anzunehmen, ...》と書かれている。Beyer による英訳本 (1955 年) では、この部分は《... it is convenient to assume, ...》と訳されている。Wightman (1995 年) は《... it is appropriate to assume, ...》と訳した方が原文の意味に近いとしている [4]。

いずれにしても、von Neumann も自信をもって「自己共役作用素と測定可能量是一对一対応する」という公理を掲げていたわけではない。そうではあるが、自己共役作用素と測定可能量は漏れなく一対一対応する、という信念は数理物理学者たちの間に定着したようである。超選択則の発見は、この信念が誤っていたという気づきであった。

### 3 超選択則の意義と形式

自己共役作用素が必ずしも測定可能物理量を表しているわけではないことが明らかになると、当然、自己共役作用素が測定可能な物理量になるための必要十分条件を知りたくなる。また、「測定可能」の定義も明確にしなければならないが、後述する。

**超選択則 (superselection rule) は、自己共役作用素が測定可能量であるための必要条件である：**

$$A \text{ が測定可能} \Rightarrow A \text{ が超選択則を満たす.} \quad (3)$$

対偶は、

$$A \text{ が超選択則を満たさない} \Rightarrow A \text{ が測定不可能.} \quad (4)$$

Dirac 場や荷電スカラー場はこれに該当している。超選択則は何種か知られているが、測定可能量を必要十分に特徴付けるに至っているかどうか、疑問である。

また、必ずしも自己共役作用素で表されないが測定可能な量を表す形式として POVM (probability-operator valued measure) という概念があるが、あれはどちらかと言うと、非可換な 2 つの自己共役作用素を誤差覚悟で同時測定する、といった場面で使われるものであり、適当に理論を拡大すれば POVM は自己共役作用素の測定理論に取り込むことができる。

超選択則は次のように定式化される。**超選択則を特徴付ける作用素  $J$  (superselection charge) があり、自己共役作用素  $A$  が測定可能量ならば**

$$[A, J] = 0 \quad (5)$$

**を満たす、というのが超選択則である。**一方で、ハミルトニアン  $H$  に対して

$$[H, J] = 0 \quad (6)$$

という条件は  $J$  の保存則だが、超選択則は  $J$  がすべての測定可能量  $A$  と可換であると言っている。 $J$  に対する条件という意味では、超選択則は保存則が極端に強くなったケースと考えられる。

もともと Wick, Wightman, Wigner が提唱した超選択則はユニヴァレンス超選択則と呼ばれ、時間反転対称性あるいは空間回転対称性に基づいて証明される [3, 6]。また電荷保存則に基づく超選択則も量子電磁力学の枠組みで証明されている [7]。しかし「超選択則 (5) を満たさない物理量はなぜ測定できないのか？」という理由はいまだに明らかにされておらず、また、一般的にどのような状況で超選択則が成立し、あるいは破れるのか、わかっていない。そのために超選択則は、ともすれば天下りのルールと思われがちであり、その意味内容を誤解されることも多い [8, 9]。本論文では、じつは超選択則は測定過程の力学と対称性から自然に導かれる法則であることを示す。

## 4 測定過程のフォンノイマンモデル

一般論を展開する前に、von Neumann が定式化した測定過程のモデルを説明する [5]. 正準交換代数で記述される 2つの量子系を用意する. 一方が**測られる対象系**であり, 位置  $q$  と運動量  $p$  を持つ. 他方が**測定器役の系**であり, 位置  $Q$  と運動量  $P$  を持つ. やりたいことは,  $q$  を測ることである. 我々は  $q$  の値を直接知ることにはできないが,  $Q$  の値を読み取ることにはできるとする. それなら,  $q$  の位置に合うように  $Q$  が動けばよい. 対象系と測定器の相互作用・時間発展は Heisenberg operator を定める写像

$$\alpha_t : A \mapsto \alpha_t(A) = U_t^\dagger A U_t \quad (7)$$

で記述される. この代数自己同形写像  $\alpha$  によって

$$Q \mapsto \alpha(Q) = Q + q \quad (8)$$

という変化が起きれば, そして相互作用以前の  $Q$  の期待値  $\omega(Q)$  を知っていれば, 相互作用後の  $\alpha(Q)$  を測ることによって, 目盛りの差分  $\alpha(Q) - \omega(Q)1$  から対象系の位置  $q$  を求めることができる. 具体的なハミルトニアンと時間発展変換を

$$H := KqP, \quad U_t := e^{-iHt/\hbar}, \quad Kt/\hbar = 1 \quad (9)$$

で与えれば,  $[Q, P] = i\hbar$  から  $\alpha(Q) = Q + q$  が導かれ, (8) のような所望の指針シフトが得られる.

**測定のためには, ミクロ対象系とマクロ測定器の相互作用を通じて, ミクロ系の物理量の値にマクロ系の物理量の値を追従させる機構が必要だ,** という点に注目してほしい. また, マクロ測定器もミクロ系と接触・相互作用する場面では量子力学で記述できるという点にも注目してほしい.

このモデルでは, 対象系の運動量  $p$  は, 測定過程後に

$$\alpha(p) = U^\dagger p U = p - P \quad (10)$$

に変化する. より一般的に考えても,  $U$  の表式には  $q$  が含まれるので (そうでないと  $q$  の測定にならない),  $U$  と  $p$  は非可換であり,  $U^\dagger p U \neq p$  となる. つまり, **位置  $q$  を測るとき運動量  $p$  の変化は避けられない.** 荒っぽい言い方ではあるが, これは不確定性関係の一種である. この命題の対偶から,  **$p$  をまったく変化させない方法では  $q$  は測れない**と言える. 運動量保存則と位置の測定は両立し得ない関係にある. ここに超選択則の萌芽がうかがえる.

## 5 保存量 vs. 測定可能量

もう一つ、保存則と測定が両立しないケースを示す。対象系は  $n$  個の質点からなる系で各質点の質量・位置・運動量を  $m_r, q_r, p_r$  ( $r = 1, \dots, n$ ) とする。測定器は物理量  $M$  (meter, pointer, indicator) を持つとする。測定過程は物理量代数の自己同形写像  $\alpha$  で表され、測定前の任意の物理量  $B$  は測定過程後には  $\alpha(B) = e^{iHt/\hbar} B e^{-iHt/\hbar}$  に移される。測定過程は von Neumann モデルよりも一般的なものとしてよいが、対象系の運動量の総和は保存すると仮定する：

$$p_x := \sum_{r=1}^n p_r, \quad \alpha(p_x) = p_x. \quad (11)$$

この場合、質点系の重心座標

$$x := \frac{\sum_{r=1}^n m_r q_r}{\sum_{r=1}^n m_r} \quad (12)$$

は、以下に説明する意味で、測れない。もしも、 $x$  に合わせて  $M \mapsto \alpha(M) = M + x$  と変動する物理量  $M$  があったとする。  $M$  自身は測定器の物理量代数に属する量なので、対象系の任意の物理量  $A$  と可換  $[A, M] = 0$  である。従って対象系の全運動量  $p_x$  に対しても  $[p_x, M] = 0$  である。測定過程  $\alpha$  は代数の自己同形写像だから、

$$[\alpha(p_x), \alpha(M)] = \alpha([p_x, M]) = 0 \quad (13)$$

が成り立つ。一方で、 $[x, p_x] = i\hbar$  であり、(11) で  $\alpha(p_x) = p_x$  を要請し、また  $\alpha(M) = M + x$  を仮定したので、

$$[\alpha(p_x), \alpha(M)] = [p_x, M + x] = -i\hbar \quad (14)$$

が導かれるが、これは (13) と矛盾する。以上より、**対象系の全運動量を保ち、かつ、測定器の物理量  $M$  を対象系の重心の位置  $x$  に対して  $\alpha(M) = M + x$  のように連動させる測定過程  $\alpha$  は存在しない**、と結論できる。

問題を拡張して、 $x$  の非自明な関数  $f(M, x)$  について  $\alpha(M) = f(M, x)$  かつ  $\alpha(p_x) = p_x$  となることを要請しても、やはりそのような  $\alpha$  はないことが証明できる。

通常、運動量保存則とは、部分系ではなく系全体の運動量の総和が時間とともに変化しないことを言うのだが、この例では**対象系だけで運動量保存則が閉じている**ことに注意してほしい。

この例から、**保存量  $p_x$  に対して非可換な量  $x$  は測定不可能だ**、という教訓が得られる。対偶を言うと、**ある量が測定可能であるためには保存量  $p_x$  と可換でなければならない**ことになる。例えば、2つの質点の相対座標  $q_r - q_s$  は  $p_x$  と可換であり、運動量保存則に抵触せずに測定可能である。

保存則は対称性（変換則と不変性）と深く関わっているが、以上の検討例から、ある量が測定可能か否かという判定条件は対称性と深く関わることが予期される。非可換な量の保存則と誤差なし測定とは両立しないことは Wigner-Araki-Yanase-Ozawa の定理として知られているが、それを極限まで強めたものが超選択則だと言える。

## 6 被測定量と指針量の共変性

「間接的に測れる」とはどういうことかももう少し詰めて考えよう。ミクロ系の物理量（被測定量）を  $A$  とし、その読み取り役としてのマクロ系物理量（指針量）を  $M$  としよう。  $M$  の値を読み取る方法はあると仮定する。問題は  $M$  の読み取り値が  $A$  の値を反映しているかどうかである。これでもまだ数学的定義としては穴があるが、「測定可能」という概念を次のように規定したい：(i)  $M$  の値から  $A$  の値を一意的に決める理論的もしくは経験的方法がある場合、我々は  $M$  によって  $A$  を確実に測れるという。(ii)  $M$  の値から  $A$  の値を一意的には決められなくても、0 でない確率で推定できる場合、  $M$  によって  $A$  を推定できるという。(iii)  $M$  の値と  $A$  の値が統計的にもまったく無関係である場合、  $M$  によって  $A$  を測れないという。

間接測定において肝心なことは指針量が被測定量に連動していることである。 von Neumann のモデルで言えば、任意の長さ  $b$  による対象系の位置  $q$  の移動を

$$\sigma_b(q) := e^{ipb/\hbar} q e^{-ipb/\hbar} = q + b, \quad (15)$$

指針  $Q$  の移動を

$$\tau_b(Q) := e^{iPb/\hbar} Q e^{-iPb/\hbar} = Q + b \quad (16)$$

と書くと、測定過程前の  $Q$  は  $\sigma_b$  では動かないが、測定過程後の  $\alpha(Q) = Q + q$  は対象系に連動して  $\sigma_b(\alpha(Q)) = Q + q + b$  に移動する。この連動性

$$\begin{aligned} e^{ipb/\hbar} e^{iHt/\hbar} Q e^{-iHt/\hbar} e^{-ipb/\hbar} &= e^{iHt/\hbar} e^{iPb/\hbar} Q e^{-iPb/\hbar} e^{-iHt/\hbar} \\ \sigma_b(\alpha(Q)) &= \alpha(\tau_b(Q)) \end{aligned} \quad (17)$$

は**共変性** (covariance) と呼ばれ、間接測定が機能しているために成り立っていてほしい条件である。いまの場合、この等式は、

$$Q + (q + b) = (Q + q) + b \quad (18)$$

と確認できる。

## 7 測定過程の対称性

対象系（測定される系）の物理量代数を  $\mathcal{A}$ ，測定器の物理量代数  $\mathcal{M}$  とする．群  $G$  の各元  $g \in G$  が  $\mathcal{A}$  に代数自己同形  $\sigma_g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  で作用し， $\mathcal{M}$  にも代数自己同形  $\tau_g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  で作用しているとする：

$$\sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2} = \sigma_{g_1 g_2}, \quad \tau_{g_1} \circ \tau_{g_2} = \tau_{g_1 g_2}, \quad g_1, g_2 \in G. \quad (19)$$

測定過程は，対象系と測定器を併せた複合系のテンソル積代数の自己同形  $\alpha : \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{M}$  である．またテンソル積代数にも群作用は拡張できて， $\sigma_g \otimes \tau_g, \sigma_g \otimes \text{id}, \text{id} \otimes \tau_g$  はいずれも写像  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{M}$  を定める．このとき，任意の  $g \in G$  に対して可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} \\ \sigma_g \otimes \tau_g \downarrow & & \downarrow \sigma_g \otimes \tau_g \\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} \end{array} \quad (20)$$

が成り立つならば，測定過程  $\alpha$  が  $G$  不変性を持つと言う． $G$  について**総和保存則** (total conservation law) が成り立つとも言う．

保存則と呼ぶ理由：自己共役物理量  $J \in \mathcal{A}$ ， $K \in \mathcal{M}$  を生成元として1パラメータ  $s \in \mathbb{R}$  を持つ群作用が

$$\sigma_s(A) = e^{iJs/\hbar} A e^{-iJs/\hbar}, \quad \tau_s(M) = e^{iKs/\hbar} M e^{-iKs/\hbar} \quad (21)$$

とユニタリ実現され，時間発展  $\alpha_t(B) = e^{iHt/\hbar} B e^{-iHt/\hbar}$  はハミルトニアン  $H$  でユニタリ実現されているとする．このとき，

$$[H, (J + K)] = 0 \quad (22)$$

が成り立つならば， $\alpha_t(J + K) = J + K$  すなわち保存則が成り立ち，任意の  $B \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{M}$ ； $s, t \in \mathbb{R}$  に対して

$$\alpha_t((\sigma_s \otimes \tau_s)(B)) = (\sigma_s \otimes \tau_s)(\alpha_t(B)) \quad (23)$$

すなわち (20) が成り立つ．

総和保存則とは別に，任意の  $g \in G$  について可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} \\ \sigma_g \otimes \text{id} \downarrow & & \downarrow \sigma_g \otimes \text{id} \\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} \end{array} \quad (24)$$



が成り立つならば、測定過程は対象系で閉じた  $G$  不変性を持つ、あるいは孤立保存則 (isolated conservation law) を満たすと言う。この場合は (22) の  $[H, (J + K)] = 0$  の替わりに

$$[H, J] = 0 \quad (25)$$

を要請する。

## 8 共変測定

測定器の物理量  $M$  に関して可換図式

$$\begin{array}{ccc} 1 \otimes M & \xrightarrow{\alpha} & \alpha(1 \otimes M) \\ \text{id} \otimes \tau_g \downarrow & & \downarrow \sigma_g \otimes \text{id} \\ 1 \otimes \tau_g M & \xrightarrow{\alpha} & \alpha(1 \otimes \tau_g M) = \sigma_g(\alpha(1 \otimes M)) \end{array} \quad (26)$$

が成り立つならば、 $M$  は**共变的指針量** (covariant indicator) であると言う。これは (17) の von Neumann モデルのメーター  $Q$  の性質  $\sigma_b(\alpha(Q)) = \alpha(\tau_b(Q))$  を一般化した条件式である。

総和保存則・孤立保存則・共变的指針量はそれぞれ別の概念である。

## 9 物理量の等号 vs. 測定値の等号

$A$  は測定前の対象系の物理量、 $\alpha(M)$  は測定過程の後の測定器の物理量である。素朴には間接測定は  $A = \alpha(M)$  とすることを目指すのだが、**物理量（演算子）として系の状態に無関係に両者が等しいことを要請するのは過剰な要求である**。状態を決めれば、物理量のスペクトル値の一部分が測定値として顕在化するが、すべてのスペクトル値が顕在化するわけではない。出現確率 0 のスペクトル値に関してまで両者が等しくなっている必要はない。「物理量の等号」を弱めた概念として「出現する測定値の等号」の概念があった方がよい。

「測定値の等号」に相当する概念として、小澤正直氏 [10] は**完全相関** (perfect correlation) という概念を導入した。Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  上の 2 つの自己共役作用素  $A, B$  がスペクトル分解

$$A = \int \lambda E^A(d\lambda), \quad B = \int \lambda E^B(d\lambda) \quad (27)$$

を持つとする。ここで  $E^A, E^B$  はスペクトル測度。状態ベクトル  $\psi \in \mathcal{H}$  において、任意の Borel 集合  $\Delta \subset \mathbb{R}$  に対して

$$E^A(\Delta)\psi = E^B(\Delta)\psi \quad (28)$$

が成り立つならば、状態  $\psi$  において  $A$  と  $B$  が**完全相関**にある (perfectly correlated in the state  $\psi$ ) と言う。この関係が成り立っていれば、状態  $\psi$  において  $A$  と  $B$  は同時測定可能であり、 $A$  の測定値が  $\Delta$  内にあれば  $B$  の測定値も  $\Delta$  内にあり、その逆も言える。この関係を

$$A \equiv_{\psi} B \quad (29)$$

と書き、 $\equiv_{\psi}$  を**小澤の等号**と呼ぶ。小澤の等号は (i) 反射律： $A \equiv_{\psi} A$ , (ii) 対称律： $A \equiv_{\psi} B \Rightarrow B \equiv_{\psi} A$ , (iii) 推移律： $A \equiv_{\psi} B, B \equiv_{\psi} C \Rightarrow A \equiv_{\psi} C$  を満たす。従って、小澤の等号は物理量の同値関係である。

小澤の等号は GNS (Gelfand-Naimark-Segal) 表現 [11] を使えば以下のように表される。状態ベクトル  $\psi \in \mathcal{H}$  に伴う状態 (state)  $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  を

$$\omega(A) := \langle \psi | A | \psi \rangle, \quad A \in \mathbf{B}(\mathcal{H}) \quad (30)$$

という線形関数と定める。ここで  $\mathbf{B}(\mathcal{H})$  は  $\mathcal{H}$  上の有界作用素全体。状態  $\omega$  の定義域を  $A, B$  で生成される部分代数  $\mathcal{G}(A, B)$  に制限して、この代数の GNS 表現を  $\pi_{\omega}$  とすると、小澤の等号は

$$\pi_{\omega}(A) = \pi_{\omega}(B) \quad (31)$$

と同値であることが小澤氏自身によって証明されている。

例えば 4 次行列と状態ベクトル

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

$(c_1, c_2 \neq 0)$  についての GNS 表現は、 $\mathcal{H}_{\omega} = \mathbb{C}^2$  を表現空間とし、

$$\pi_{\omega}(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \pi_{\omega}(B) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad (33)$$

となる。状態ベクトル  $\psi$  についての小澤の等号は  $\pi_{\omega}(A) = \pi_{\omega}(B)$  を意味する。 $A \neq B$  でも  $\pi_{\omega}(A) = \pi_{\omega}(B)$  となることはあり得る。

対象物理量  $A$  と測定過程後の指針量  $\alpha(M)$  の「測定値の等号」を定めるにはこうすればよい。 $A$  と  $\alpha(M)$  が生成する代数を  $\mathcal{G}(\subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{M})$  とおき、対象系の初期状態を  $\omega$ , 測定系の初期状態を  $\varrho$  として、複合系の状態  $\nu = \omega \otimes \varrho$  に関する  $\mathcal{G}$  の GNS 表現を  $\pi_{\nu} : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{B}(\mathcal{H}_{\nu})$  としたとき、

$$\pi_{\nu}(A) = \pi_{\nu}(\alpha(M)) \quad (34)$$

が成り立てばよい．このとき  $A$  と  $\alpha(M)$  の出現値はつねに一致するので，状態  $\nu$  における測定値に関しては  $A$  と  $\alpha(M)$  は等しいと言える．これを

$$A \equiv_{\nu} \alpha(M) \quad (35)$$

と書く．

## 10 主定理：超選択則の導出

測定過程が群  $G$  の作用に関して孤立保存則を許容するならば，対象系の任意の初期状態に関して共変的に測定可能な量  $A$  は，群  $G$  の作用の下で不変である．

証明：対象系と測定系を併せた複合系の初期状態を  $\nu = \omega \otimes \varrho$  とする．いま，測定過程のスキーム  $(\alpha, A, M, \nu)$  と群作用  $(G, \sigma, \tau)$  が用意され，測定前の物理量  $A$  と測定過程後の指針量  $\alpha(M)$  の間で  $A \equiv_{\nu} \alpha(M)$  が成り立つことを要請している．群作用を施したものについても測定値の等号  $\sigma_g A \equiv_{\nu} \alpha(\tau_g M)$  を要請する．測定過程における指針の共変性は  $\alpha(\tau_g M) = \sigma_g(\alpha M)$  をもたらす．また，孤立保存則より  $\sigma_g \circ \alpha = \alpha \circ \sigma_g$ ．以上より，

$$\sigma_g A \equiv_{\nu} \alpha(\tau_g M) \equiv_{\nu} \sigma_g(\alpha M) \equiv_{\nu} \alpha(\sigma_g M). \quad (36)$$

小澤の等号は推移律を満たすことに注意．しかも  $M = 1 \otimes M$  と  $\sigma_g 1 = 1$  ( $1$  は対象系物理量の単位元) だから

$$\alpha(\sigma_g M) = \alpha(\sigma_g(1 \otimes M)) = \alpha(1 \otimes M) \quad (37)$$

となり，(36) の等号関係は  $g \in G$  によらない．従って

$$\sigma_g A \equiv_{\nu} A \quad (38)$$

が複合系の状態  $\nu = \omega \otimes \varrho$  について成立する．任意の対象系状態  $\omega$  に関してこれが成り立つとすると（通常の実験では，測定器の初期状態はやたと変えないが，対象系の状態はいろいろ変えてみるものなので，この要請は物理的に見て過大要求ではない），結局

$$\sigma_g A = A \quad (39)$$

である．すなわち  $A$  は  $G$  の作用で不変である（証明終わり）．

物理的意味：ミクロ系だけで閉じた強固な保存則があると，その保存量に対して非可換な物理量は系の外から測れない，測定可能な量は孤立保存量に対して可換な量に限られ

る, という主張が超選択則である. これは不確定性関係の極端なケースとも言える. 測定には擾乱がつきものだが, 保存量の擾乱が許されない状況では非可換量の測定は不能に陥るのである. また, 超選択則は天下りの規則ではなく, 力学的な理由と必然性があることをこの定理は示している. 対称性は天下り的に与えられるものではなく, 力学によって裏付けされるものであるという趣旨のことを Georgi [12] も書いている.

## 11 ゲージ超選択則

例としてボソン系の代数  $\mathscr{A}$  のゲージ対称性に伴う超選択則を考えよう. 生成消滅演算子  $A_j^\dagger, A_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) が交換関係

$$[A_j, A_k] = 0, \quad [A_j^\dagger, A_k^\dagger] = 0, \quad [A_j, A_k^\dagger] = \delta_{jk} \quad (40)$$

を満たす. さらに任意の  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $B \in \mathscr{A}$  に対して

$$N := \sum_{j=1}^n A_j^\dagger A_j, \quad \sigma_\theta(B) := e^{iN\theta} B e^{-iN\theta}, \quad (41)$$

とおくと,

$$\sigma_\theta(A_j) = e^{-i\theta} A_j, \quad \sigma_\theta(A_j^\dagger) = e^{i\theta} A_j^\dagger \quad (42)$$

が成り立つ. 絶対値が 1 の複素数全体の集合

$$U(1) := \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\} \quad (43)$$

は掛け算に関して群をなし, 写像  $\sigma : e^{i\theta} \mapsto \sigma_\theta$  は群  $U(1)$  の代数  $\mathscr{A}$  上の作用を定める. この作用をゲージ変換と呼ぶ.  $N$  を全ボソン数あるいは電荷と呼ぶ.

$N$  が孤立保存量だとする. つまり, この系を他の系と接触させて相互作用させても, 測定過程  $\alpha$  は  $\alpha(N) = N$  を満たすとする. このとき  $A_j + A_j^\dagger$ ,  $i(A_j - A_j^\dagger)$  は自己共役だがゲージ不変でなく, 超選択則によれば測定不可能である. 一方で,

$$\frac{1}{2}(A_j^\dagger A_k + A_k^\dagger A_j), \quad \frac{1}{2i}(A_j^\dagger A_k - A_k^\dagger A_j) \quad (44)$$

などがゲージ不変な自己共役量であり, 超選択則によって測定可能性を許される.

物理的な例として, 超伝導系に対して  $A_j$  は Cooper 凝縮と呼ばれる物理量を表しているし, 超流動系に対しては  $A_j$  は Bose-Einstein 凝縮と呼ばれる物理量を表している. ゲージ超選択則のため  $A_j$  そのものは測定できないが, Cooper 凝縮の個数に相当する  $A_j^\dagger A_j$  や, Cooper 凝縮の位相差に相当する  $A_j^\dagger A_k$  は測定可能である. 2つの超伝導体が接触したと

きに流れる Josephson 電流は、この位相差に比例する電流である。一塊の超伝導体内でも Cooper 凝縮の位相の空間勾配に比例する電流が生じるが、これが超伝導電流である。

超選択則の主張をもう一度言おう。ミクロ系で電荷保存則が成立していれば、ミクロ系のゲージ変換に連動してマクロ測定器の指針量を動かすような測定過程は存在しない。この意味で、ゲージ変換で非自明な変換を受けるミクロ物理量は測れない。電荷保存則は、いままでに破れたことのない、最も厳格な物理法則の一つである。ということは、我々には測る手段のない、ミクロの世界のみに存在する物理量があるということになる。 $A_j$  や  $A_j A_k$  などがそういう物理量である。

余談：Feynman は学生だった頃、講義中に「これは電子を創る演算子です」と先生が言ったとき「どうやって電子を創るんですか？電荷保存則に反するじゃないですか！」と言って、生成消滅演算子の理論を学ぶのをやめてしまった（そして自己流の量子論を作り上げた）というエピソードがある（Feynman 自身が Nobel 賞講演でそう語っている [13]）。たしかにそんなものが見つかったら電荷保存則に反する。だからこそ電子の生成消滅演算子は我々には観測されないようになっていて、つじつまが合っているのである。

## 12 カラーの閉じ込め問題を全然知らない人のために

現在の素粒子の標準理論では、陽子や中性子などはクォークと呼ばれる基本粒子から構成されていることになっている。クォークは u (up), d (down), c (charm), s (strange), t (top), b (bottom) の 6 種類があり、例えば陽子は uud, 中性子は udd, パイ中間子は  $u\bar{d}$  というクォークの複合系とされる。クォークの複合粒子はハドロンと総称される。

クォークは強い相互作用と呼ばれる力で結合している。強い相互作用はグルオンという粒子の放出・吸収によって媒介される。この力学は  $SU(3)$  を構造群とするファイバー束の接続の理論に対する場の量子論（量子色力学, Quantum Chromodynamics, QCD と呼ばれる）で記述される。QCD ではクォークは  $SU(3)$  の定義表現、グルオンは  $SU(3)$  の随伴表現に従う。クォークの複合粒子はテンソル積表現を既約分解した表現に従うことになるが、現実のハドロンはつねに自明表現に従う。 $SU(3)$  の非自明な表現は「カラーを持つ」と言われる。その感覚で言えば、 $SU(3)$  の自明表現に従うハドロンは「無色」ということになる。

しかも実験観測では、クォークもグルオンも単独の粒子として取り出されたことはない。つまり、クォークもグルオンもつねにハドロンの中に閉じ込められているらしく、我々には「無色」の粒子だけが見つかる。この経験事実を「カラーの閉じ込め」(color confinement) という。QCD などの基礎理論からカラーの閉じ込めを演繹しようという問題は、素粒子論の積年の課題であるが、万人が納得のいく解答は得られていない。

### 13 カラーの閉じ込めの証明 (?)

カラーは群  $G = SU(3)$  の対称性に伴う保存量であり、 $SU(3)$  のリー代数の元でもある。カラーはミクロ系で孤立保存則を満たしている。ゆえに超選択則が適用されて、**測定可能量は  $SU(3)$  不変量でなくてはならない**。クォークやグルオンの場合は  $SU(3)$  の非自明な変換を受けるので測定不可能である。また、 $SU(3)$  は非可換群であり、カラー自身もまた  $SU(3)$  の随伴表現に従って非自明な変換を受ける。ゆえにカラーは測定可能量ではない。

カラーに似た量として電荷があるが、電荷は  $U(1)$  対称性に伴う孤立保存量である。ゆえに超選択則が適用されて、測定可能量は  $U(1)$  不変量でなくてはならない。電子のスピンノル場や荷電パイオンのスカラー場は  $U(1)$  不変ではないのでこれらは測定不可能である。しかし  $U(1)$  は可換群なので電荷そのものは  $U(1)$  不変量であり測定可能である。また、電磁場そのものも  $U(1)$  不変量なので測定可能である。従って光子は閉じ込められない。電子の場合は測定できないが、電子の電荷やエネルギーは測定できる。

### 14 対称性の自発的破れ

角運動量は非可換群  $SO(3)$  に伴う保存量であり、 $SO(3)$  のリー代数の元でもあり、 $SO(3)$  の随伴表現に従うので、 $SO(3)$  作用の不変量ではない。そうすると、**角運動量は保存量に対して非可換だから、超選択則によれば、角運動量は測定不可能なはずである**。しかし実際、角運動量は測定可能であるように見える。Zeeman 効果や Stern-Gerlach の実験は原子の角運動量を測っているし、偏光・複屈折は光子のスピン角運動量を測っている。どうしてそのようなことが許されるのか？

その答えは、**我々のマクロな世界は回転対称性が破れている**という事実にある。水の分子は回転対称な形をしていないし、アンモニアの分子も生体を形作るアミノ酸やたんぱく質分子も回転不変な形ではない。回転対称性は分子のレベルや固体結晶のレベルで自発的に破れており、マクロ世界には  $SO(3)$  の作用で非自明な変換を受ける球対称でない系がふんだんにある。そのような系はゼロでない角運動量を持つことができる。従って、ミクロ系とマクロ系が相互作用して角運動量を交換することができる。そのため角運動量の保存則はミクロ系で閉じない。ゆえに角運動量に対しては超選択則は適用されず、ミクロ系の回転変換量にマクロ系の指針量を連動させることができる。実際、角運動量を測定する実験はすべてミクロ系に電場や磁場や複屈折媒体などの非等方的外場を印可して回転対称性を破ることによって実行されている。

同様の考察から、超伝導のような  $U(1)$  対称性が破れた状態（正確には、長距離秩序を有する状態）を作れば  $U(1)$  可変量（相対位相のような量）が測定できることも納得がい

く、Josephson 接合がこのような状況に相当している。Josephson 接合の場合、 $U(1)$  対称性が自発的に破れた系を2つ用意し、トンネル効果で接合させることによって  $U(1)$  保存量の孤立保存則を破っているのである。

## 15 批判に備えて

「この議論は《カラーの閉じ込め》を《カラーはマクロ量ではない》と言い換えただけのトートロジーではないか」という批判はあり得るが、それは的外れである。本発表は「測れる」という言葉の意味内容を「被測定量と指針量の間の群作用共変性」のことだと規定し、「ミクロ孤立系のカラー保存則が破れなければ、たとえマクロ世界にカラー可変量があっても、ミクロ側のカラー変換に対して共变的に連動しないので、指針量として機能しない」という力学的機構に踏み込んだ主張をしているのである。

しかも「すべての測定可能量は超選択チャージと可換でなければならない」ことを天下一の的に要請をしているのではなく、「測定過程が孤立保存則を許容する」ことだけを仮定すれば超選択則が導けることを示している。測定過程が孤立保存則を許容するかどうかは、力学の問題としてチェックが可能な条件である。

また、ある量を群作用について共变的に測るためには、その対称性を破ればよい（孤立保存則を破ればよい）という方針も与えている。

ただし、局所ゲージ対称性の場の相対論的量子論の定式化は単純ではなく（ghost, auxiliary fields, indefinite-metric space など）、ここでの議論をそのままカラー閉じ込めの証明とするわけにはいかないだろう。また、「カラーが測定されない」とこと、「クォークがハドロンの外に出て来ない」ことは、やはり一段異なる問題であり、束縛系・ダイナミクスの問題としての閉じ込めの問題は未解決のまま残る。

## 16 階層性をもたらすもの

自然界にはクォーク・ハドロン・原子核・原子・分子・高分子・ウィルス・細胞・生物などの階層構造があるが、何が階層性をもたらしているのか？

一つの答えとして、孤立保存則を挙げたい。孤立保存則があると、保存量と非可換なものはその系の外部からは見えなくなるというのが超選択則であった。また、孤立保存量の固有値は、系内部の運動では変化しない。つまり、孤立保存量はセクターを定義し、系固有の境界を定義する。また、孤立保存則は入れ子構造になり得る。カラーはハドロンの外には出て来ない、アイソスピンは原子核外には出て来ない保存量である。

それともう一つ、階層性をもたらすものとして対称性の自発的破れを挙げたい。P. W. Anderson の More is different [14] や小嶋泉氏の Micro-Macro duality [15] の議論が指し示しているように、対称性の自発的破れに伴って出現する order parameter はセクターを定める（このことは昔から多くの数理論理学者たちによってさまざまなアプローチで気づかれている [16]）。また、order parameter は群作用で変換を受けるので、それを力学変数とする系はゼロでない保存量を持つことができ、孤立保存則を乗り越えてミクロ対象系の外部からの測定や制御が可能になる。例えば、回転対称性は分子の階層で破れている。並進対称性は、おそらくさまざまなレベルで何度も破れているのだろう。並進対称性は、ハドロンの階層で自発的に破れているし、固体結晶の階層でも破れている。そうやって並進対称性が破れているからこそ「ものの位置」を測れるようになっている。もちろん全運動量保存則が成り立っているならば、全系の重心の位置は測れず、測れるものは相対位置に限られる。

言いたかったことは、「孤立保存則が、ある種の境界線・節目を作り、対称性の自発的破れがマクロ力学変数を創発することによって、新しいマクロ階層が出現するとともに、ミクロ階層を測定・制御する手段も提供され、自然界に入れ子状の階層構造が出現する」という描像が描けるということだ。

## 17 Wigner-Araki-Yanase-Ozawa の定理との関係

不確定性関係にはいろいろなバージョンがあるが、そのうちの一つ、保存量に対して非可換な量の測定精度の限界を与える不等式を述べる。これは Wigner-Araki-Yanase の定理を小澤氏が定量的関係式に仕上げたものである [17, 18, 19]。

対象系の物理量  $A$  を、測定器の指針量  $M$  で測ったときの平均誤差を

$$\varepsilon(A) := \sqrt{\langle (\alpha(M) - A)^2 \rangle}, \quad \alpha(M) := e^{iHt/\hbar} M e^{-iHt/\hbar} \quad (45)$$

とする。物理量  $J$  の標準偏差は

$$\sigma(J) := \sqrt{\langle (J - \langle J \rangle)^2 \rangle}. \quad (46)$$

測定過程  $\alpha$  において  $J = J_1 + J_2$  は保存するとする： $\alpha(J) = J$ （または  $[H, J] = 0$ ）。ここで  $J_1$  は対象系の量、 $J_2$  は測定器の量。また、 $[J_2, M] = 0$  とする。合成系の初期状態はテンソル積状態  $\nu = \omega \otimes \varrho$  とする。このとき

$$\varepsilon(A)^2 \geq \frac{|\langle [A, J_1] \rangle|^2}{4\{\sigma(J_1)^2 + \sigma(J_2)^2\}} \quad (47)$$

が成り立つ。



超選択則を考える状況では、そもそも  $J_1$  だけで保存則が成立しており ( $\alpha(J_1) = J_1$ ), 初期状態も  $\sigma(J_1) = \sigma(J_2) = 0$  を満たすように選べる。従って、測定誤差  $\varepsilon(A)$  はどのような値でも取り得る。つまり、いくら  $M$  の目盛りを読み取っても  $A$  の値の推測の助けにならない。

私の議論は、「測る」ことを「被測定量と指針量の共変性を作ること」だと特徴付けて、測定過程という力学的プロセスの対称性が、被測定量と指針量の共变的相関を作ることや妨げる、従って群可変量が測れない、という超選択則の意味内容を明らかにしている。つまり、測定に対する要請事項として精度（誤差）よりも共変性の方に重点を置いた議論だと言える。

謝辞：古結明男氏や北野正雄氏と量の理論・次元解析などについて議論を交わしたことが本研究の伏線になっています。古結明男氏は名古屋大学時代の同級生であり、学生時代から何かと議論する仲でした。北野正雄氏は京都大学の教授であり、職場と研究の興味が近いことから時折議論させていただいていました。両氏に感謝します。雑誌『理系への数学』（現代数学社）に量子力学の解説記事を執筆することが、量の理論を再考し、量の測定過程と超選択則の関係に気づくきっかけになりました。この機会を作っていた現代数学社社長の富田淳氏に感謝します。本研究は日本学術振興会科学研究補助費 Nos. 22540281, 22540410 の支援を受けています。

## 参考文献

- [1] 雑誌『理系への数学』（現代数学社）の連載記事「21世紀の量子論入門」で、谷村はもう少し広い観点から超選択則について論じている：「第17回：計量と次元解析と超選択則」2011年9月号 pp.41-47. 「第18回：有向量とパリティと超選択則」2011年10月号 pp.42-48. 「第19回：ゲージ超選択則の力学的由来」2011年11月号 pp.47-53.
- [2] 本講演の内容は次の論文と重なる部分が多い：S. Tanimura, “Superselection rules from measurement theory,” arXiv: 1112.5701 (2011).
- [3] G. C. Wick, A. S. Wightman, and E. P. Wigner, “The intrinsic parity of elementary particles,” Phys. Rev. **88**, 101 (1952).
- [4] A. S. Wightman, “Superselection rules; old and new,” IL Nuovo Cim. **110B**, 751 (1995).
- [5] J. v. ノイマン（井上健他 共訳）「量子力学の数学的基礎」みすず書房 (1957). 自己共役作用素と測定可能量の関係は IV.2 節, p.250, 測定のモデルは VI.3 節, p.350 で論じられている。

- [6] G. C. Hegerfeldt, K. Kraus, and E. P. Wigner, “Proof of the fermion superselection rule without the assumption of time reversal invariance,” *J. Math. Phys.* **9**, 2029 (1968).
- [7] F. Strocchi and A. S. Wightman, “Proof of the charge superselection rule in local relativistic quantum field theory,” *J. Math. Phys.* **15**, 2198 (1974).
- [8] 超選択則と混合状態に関する誤解を正す議論を小嶋泉氏が展開している：大矢雅則, 小嶋泉 編著「量子情報と進化の力学」牧野書店 (1996) 第I部第2章. 小嶋泉『量子論の基礎概念：その物理的解釈と超選択則』数理科学 2002年7月号 p.36.
- [9] 超選択則を誤解している本や論文の例：湯川秀樹, 豊田利幸 編著「量子力学I」岩波書店 (1978) 4.6節. 同「量子力学II」16.1節の記述も微妙. Y. Aharonov and L. Susskind, “Charge superselection rule,” *Phys. Rev.* **155**, 1428 (1967). C. Cisneros, R. P. Martínez-y-Romero, H. N. Núñez-Yépez, and A. L. Salas-Brito, “Limitations on the superposition principle: superselection rules in non-relativistic quantum mechanics,” *Eur. J. Phys.* **19**, 237 (1998).
- [10] M. Ozawa, “Quantum perfect correlations,” *Ann. Phys.* **321**, 744 (2006). 小澤正直「非可換観測量の同時測定可能性」数理解析研究所講究録（ネット閲覧可）**1565**, 133 (2007).
- [11] I. E. Segal, “Irreducible representations of operator algebras,” *Bull. Amer. Math. Soc.* **53**, 73 (1947).
- [12] H. ジョージアイ (九後汰一郎 訳)「物理学におけるリー代数」吉岡書店 (1990), p.xv の紹介文と p.121 の本文. 2010年に訳出された第2版ではこの趣旨の記述はなくなっている.
- [13] R. P. Feynman, Nobel Lecture, [http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1965/feynman-lecture.html](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1965/feynman-lecture.html). 本論文に関係する部分を引用しておく：《I didn’t have the knowledge to understand the way these were defined in the conventional papers because they were expressed at that time in terms of creation and annihilation operators, and so on, which, I had not successfully learned. I remember that when someone had started to teach me about creation and annihilation operators, that this operator creates an electron, I said, “how do you create an electron? It disagrees with the conservation of charge”, and in that way, I blocked my mind from learning a very practical scheme of calculation.》翻訳が「物理法則はいかにして発見されたか」(江沢洋 訳)に収められている.
- [14] P. W. Anderson, “More is Different,” *Science* **177**, 393 (1972).

- [15] I. Ojima, “Micro-Macro duality in quantum physics”, pp.143-161 in *Proc. Intern. Conf. on Stochastic Analysis, Classical and Quantum*, World Scientific (2005); arXiv: math-ph/0502038.
- [16] 谷村省吾「量子古典対応：量子化の技法，古典系創発の機構」数理科学 2012 年 4 月号.
- [17] E. P. Wigner, “Die Messung quantenmechanischer Operatoren,” *Z. Phys.* **133**, 101 (1952).
- [18] H. Araki and M. M. Yanase, “Measurement of quantum mechanical operators,” *Phys. Rev.* **120**, 622 (1960).
- [19] M. Ozawa, “Conservation laws, uncertainty relations, and quantum limits of measurements,” *Phys. Rev. Lett.* **88**, 050402 (2002).